# 1 Lernliste

## 1.1 Relationen

- reflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, linaer konnex
- Äquivalenzrelation, Kongruenzrelation
- Klasseneinteilung
- Hauptsatz über Äquivalenzrelationen
  Jede Äquivalenzrelation induziert in kanonischer Weise eine Klasseneinteilung und umgekehrt.

## 1.2 Gruppen

- Halbgruppe (zu jedem Element der HG gibt es ein linksneutrales und linksinverses Element, beide sind eindeutig bestimmt, Links- und Rechtstranslation sind surjektiv bzw. bijektiv)
- Gruppe, Untergruppe, Beispiele
- Transformationsgruppen, Wirkung, Invariante, Fixpunkt, Orbit, treu, (scharf) transitiv, Isotropiegruppe
- innerer Automorphismus, Normalteiler
- Homomorphiesatz für Gruppen
  Die Faktorgruppe einer Grupe nach dem Kern eines Homomorphismus ist isomorph zum vollen Bild der der Gruppe bei diesem Homomorphismus.
- Kardinalzahl
- Satz von Langrange
  Die Ordnung einer Gruppe ist gleich dem Produkt der Ordnung einer Untergruppe und dem Index dieser Untergruppe.
- Kleiner Fermatscher Satz
- einfache Gruppen
- Kommutator, Kommutatorgrupe, Normalreihe, auflösbare Gruppe
- Homomorphismus, Isomorphismus, Automorphismus, Epimorphismus
- Allgemeiner Homomorphiesatz
  Ist $R$ eine Kongruenzrelation auf der allgemeinen Algebra $\mathfrak{A} = (M, \mathfrak{V}, \mathfrak{R})$, so ist die kanonische Abbildung $\kappa : M \to M/_R$ mit $\kappa(a) = \overline{a} := \{x \in M : (a,x) \in R\}$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf die Faktoralgebra $\mathfrak{A}/_R$.

Ist umgekehrt $\varphi$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{A}$ auf eine Algebra $\mathfrak{A}'$ vom gleichen Typ, so wird $R$ mit $(x, y) \in R :\Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$ und die Faktorstruktur $\mathfrak{A}/_R$ ist isomorph zu $\mathfrak{A}'$.

- volles Bild (Image), Urbild (Kern)
- Satz von Cayley
  Jede Gruppe ist isomorph zu einer Transformationsgruppe.
- Faktorgruppen
- Homomorphiesatz für Gruppen
  Ist $\varphi$ ein Homomorphismus einer Gruppe $G$ in eine Gruppe $H$, so ist die Faktorgruppe $G/_{\ker\varphi}$ isomorph zur Gruppe $\Im\varphi$.

## 1.3 Ringe und Körper

### 1.3.1 Ringe

- Ringe, kommutativ, Ring mit Einselement, Unterring, Beispiele
- Nullteiler, Integritätsbereich
- Jeder nichttriviale endliche nullteilerfreie Ring ist ein Körper.
- Quotientenkörper
- Polynomring, Nullstelle, normiert
- Satz über Division mit Rest
  Ist $R$ ein Integritätsbereich, so existieren zu jedem $\alpha \in R[x]$ und jedem normierten $\beta \in R[x]$ eindeutig bestimmte Polynome $\gamma, \rho \in R[x]$ mit $\alpha = \gamma \cdot \beta + \rho$ und es gilt, dass der Grad von $\rho$ kleiner als der Grad von $\beta$ ist.
- Teiler, Primelement, irreduzibel
- Ideal, Hauptideal, Hauptidealring

### 1.3.2 Körper

- Schiefkörper, Körper, Beispiele
- Modul
- Körper der rationalen Funktionen, Charakteristik
- Körpererweiterung, Zwischenkörper, Primkörper
- Grad der Körpererweiterung, Gradformel
- algebraische und transzendente Zahlen

- Jede endliche Körpererweiterung ist algebraisch.
- Minimalpolynom
- Satz von Kronecker
  Zu jedem Polynom $f \in L[x]$ mindestens ersten Grades öber einem Körper $L$ existiert stets ein Erweiterungskörper und ein $a \in K$ mit $f(a) = 0$.

## 1.4 Gruppentheoretischer Aufbau der Geometrie

- Affine Inzidenzebenen
- invariantes involutorisches Erzeugendensystem, Axiome
- Anstieg, Anstiegsgerade, Abschnitt
- Ternärkörper, affine Koordinatenebene
- Loop, Doppelloop
- Affiner Satz von Desargues und Pappos
- Satz von Wedderburn
  Jeder endliche Schiefkörper ist ein Körper. (ohne Beweis)

## 1.5 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

- Grundobjekte, Menge aller konstruierbaren Objekte
- Satz von Gauss
  Für natürliche Zahlen mit $n \geq 3$ sind folgende Aussagen äquivalent:
  1. Das reguläre $n$-Eck ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar.
  2. Für die Eulersche $\varphi$-Funktion gilt $\varphi(n)$ ist eine Potenz von 2.
  3. $n = 2^m \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_r$ mit $m, r \in \mathbb{N}$ und $p_i = 2^{2^{s_i}} + 1$ ist eine Fermatsche Primzahl.
- Quadratur des Kreises
  Zu jedem gegebenen Kreis kann mit Zirkel und Lineal kein inhaltsgleiches Quadrat konstruiert werden.
- punktmengengeometrische Fassung von Tarski
- Zerlegungsstruktur, Kleinscher Raum
- Hauptsatz über Zerlegungsstrukturen, Formales Hauptkriterium
- Verdoppelung des Würfels
- Dreiteilung des Winkels

## 1.6 Lineare Räume

- linearer Raum (Vektorraum), Beispiele, Unterräume
- Linearkombination
- lineare Hülle
- Satz von den Eigenschaften der linearen Hülle
  Für beliebige Teilmengen $A, B$ eines Vektorraumes $V$ gilt:
  1. $lin(A) = \bigcup_{A \subset U} U$ ($U$ linearer Unterraum von $V$)
  2. Ist $A$ ein linearer Unterraum von $V$, so ist die lineare Hülle von $A$ gleich $A$
  3. Die lineare Hülle ist ein Hüllenoperator auf $V$, es gilt:
     - $lin : 2^V \to 2^V$
     - $A \subseteq lin(A)$
     - $A \subseteq B \Rightarrow lin(A) \subseteq lin(B)$
     - $lin(lin(A)) = lin(A)$
- lineare Unabhängigkeit
- Basis
- Basissatz für Vektorräume
  Jeder Vektorraum besitzt eine Basis und alle Basen desselben Vektorraumes sind gleichmächtig. (ohne Beweis)
- Austauschsatz von Steinitz
  Wenn $B$ eine Basis des Vektorraumes $V$ und $C = c_1, \ldots, c_r$ eine linear unabhängige Menge von Vektoren aus $V$ ist, dann existieren Basiselemente $b_1, \ldots, b_r \in B$, so dass $B' := C \cup (B \backslash \{b_1, \ldots, b_r\})$ wieder eine Basis von $V$ ist. (Basiselemente können durch andere linear unabhängige ersetzt werden.
- Dimension

## 1.7 Lineare Abbildungen, Gleichungssysteme, etc.

- lineare Abbildung, Beispiele
- Hauptsatz über endlichdimensionale lineare Räume
  Jeder lineare Raum $(V, +, \mathbb{K})$ dessen Dimension eine natürliche Zahl ist ($\dim V = n \in \mathbb{N}$), ist isomorph zum Raum $\mathbb{K}^n$.
- Rang
- Dimensionssatz für lineare Abbildungen
  Für alle linearen Abbildungen $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ eines endlichdimensionalen linearen Raumes $V$ in einen linearen Raum $W$ gilt $\dim \ker \varphi + \mathrm{rg}\varphi = \dim V$.

- Matrix, Algebra, Endomorphismenring
- invertierbare Matrix
- Determinante
- Charakterisierung der Determinanten nach Weierstraß
- Laplacescher Entwicklungssatz
- lineares Gleichungssystem
- Hauptsatz über lineare Gleichungssysteme
  Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der Systemmatrix ist.
  Ist das lineares Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar, so ist die Lösungsmenge $(n - r)$-parametrig, wenn $n$ die Anzahl der Unbekannten und $r$ der Rang der Koeffizientenmatrix ist.
- Cramersche Regel
- Gaußscher Algorithmus

## 1.8 Affine Geometrie

- affiner Raum (vier Eigenschaften), affines Koordinatensystem, affiner Unterraum, affine Hülle
- Translation, translationsgleich, Translationsgleichheit ist Äquivalenzrelation
- affine Abbildung (zwei Eigenschaften), affine Transformation
- affine Kombination, konvexe Kombination, konvexe Hülle
- Dimension, affin unabhängig

## 1.9 Euklidische Geometrie

- Bilinearform, hermitesche Form, positiv definit, hermitesche und symmetrische Matrix, euklidischer linearen Raum
- Skalarprodukt
- Cauchy-Schwartzsche-Ungleichung
  Ist $(V, f)$ ein euklidischer bzw. unitärer linearer Raum, so gilt $\forall x, y \in V \ |f(x,y)|^2 \leq f(x,x) \cdot f(y,y)$. (Gleichheit gilt, wenn $x, y$ linear unabhängig sind.)
- normierter Raum, metrischer Raum, Abstand, Orthogonalität
- Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

- orthogonale Gruppe
- Eigenwert, Eigenvektor, charakteristische Gleichung, charakteristisches Polynom
- Hauptachsentransformation