

# 1 Lernliste

## 1.1 Relationen

- reflexiv, symmetrisch, asymmetrisch, antisymmetrisch, transitiv, linear konnex
- Äquivalenzrelation, Kongruenzrelation
- Klasseneinteilung
- Hauptsatz über Äquivalenzrelationen  
Jede Äquivalenzrelation induziert in kanonischer Weise eine Klasseneinteilung und umgekehrt.

## 1.2 Gruppen

- Halbgruppe (zu jedem Element der HG gibt es ein linksneutrales und linksinverses Element, beide sind eindeutig bestimmt, Links- und Rechtstranslation sind surjektiv bzw. bijektiv)
- Gruppe, Untergruppe, Beispiele
- Transformationsgruppen, Wirkung, Invariante, Fixpunkt, Orbit, treu, (scharf) transitiv, Isotropiegruppe
- innerer Automorphismus, Normalteiler
- Homomorphiesatz für Gruppen  
Die Faktorgruppe einer Gruppe nach dem Kern eines Homomorphismus ist isomorph zum vollen Bild der Gruppe bei diesem Homomorphismus.
- Kardinalzahl
- Satz von Lagrange  
Die Ordnung einer Gruppe ist gleich dem Produkt der Ordnung einer Untergruppe und dem Index dieser Untergruppe.
- Kleiner Fermatscher Satz
- einfache Gruppen
- Kommutator, Kommutatorgruppe, Normalreihe, auflösbare Gruppe
- Homomorphismus, Isomorphismus, Automorphismus, Epimorphismus
- Allgemeiner Homomorphiesatz  
Ist  $R$  eine Kongruenzrelation auf der allgemeinen Algebra  $\mathfrak{A} = (M, \mathfrak{F}, \mathfrak{R})$ , so ist die kanonische Abbildung  $\kappa : M \rightarrow M/R$  mit  $\kappa(a) = \bar{a} := \{x \in M : (a, x) \in R\}$  ein Homomorphismus von  $\mathfrak{A}$  auf die Faktoralgebra  $\mathfrak{A}/R$ .

Ist umgekehrt  $\varphi$  ein Homomorphismus von  $\mathfrak{A}$  auf eine Algebra  $\mathfrak{A}'$  vom gleichen Typ, so wird  $R$  mit  $(x, y) \in R :\Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$  eine Kongruenzrelation auf  $\mathfrak{A}$  und die Faktorstruktur  $\mathfrak{A}/R$  ist isomorph zu  $\mathfrak{A}'$ .

- volles Bild (Image), Urbild (Kern)
- Satz von Cayley  
Jede Gruppe ist isomorph zu einer Transformationsgruppe.
- Faktorgruppen
- Homomorphiesatz für Gruppen  
Ist  $\varphi$  ein Homomorphismus einer Gruppe  $G$  in eine Gruppe  $H$ , so ist die Faktorgruppe  $G/\ker \varphi$  isomorph zur Gruppe  $\mathfrak{S}\varphi$ .

## 1.3 Ringe und Körper

### 1.3.1 Ringe

- Ringe, kommutativ, Ring mit Einselement, Unterring, Beispiele
- Nullteiler, Integritätsbereich
- Jeder nichttriviale endliche nullteilerfreie Ring ist ein Körper.
- Quotientenkörper
- Polynomring, Nullstelle, normiert
- Satz über Division mit Rest  
Ist  $R$  ein Integritätsbereich, so existieren zu jedem  $\alpha \in R[x]$  und jedem normierten  $\beta \in R[x]$  eindeutig bestimmte Polynome  $\gamma, \rho \in R[x]$  mit  $\alpha = \gamma \cdot \beta + \rho$  und es gilt, dass der Grad von  $\rho$  kleiner als der Grad von  $\beta$  ist.
- Teiler, Primelement, irreduzibel
- Ideal, Hauptideal, Hauptidealring

### 1.3.2 Körper

- Schiefkörper, Körper, Beispiele
- Modul
- Körper der rationalen Funktionen, Charakteristik
- Körpererweiterung, Zwischenkörper, Primkörper
- Grad der Körpererweiterung, Gradformel
- algebraische und transzendente Zahlen

- Jede endliche Körpererweiterung ist algebraisch.
- Minimalpolynom
- Satz von Kronecker  
Zu jedem Polynom  $f \in L[x]$  mindestens ersten Grades über einem Körper  $L$  existiert stets ein Erweiterungskörper und ein  $a \in K$  mit  $f(a) = 0$ .

## 1.4 Gruppentheoretischer Aufbau der Geometrie

- Affine Inzidenzebenen
- invariantes involutorisches Erzeugendensystem, Axiome
- Anstieg, Anstiegsgerade, Abschnitt
- Ternärkörper, affine Koordinatenebene
- Loop, Doppelloop
- Affiner Satz von Desargues und Pappos
- Satz von Wedderburn  
Jeder endliche Schiefkörper ist ein Körper. (ohne Beweis)

## 1.5 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

- Grundobjekte, Menge aller konstruierbaren Objekte
- Satz von Gauss  
Für natürliche Zahlen mit  $n \geq 3$  sind folgende Aussagen äquivalent:
  1. Das reguläre  $n$ -Eck ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar.
  2. Für die Eulersche  $\varphi$ -Funktion gilt  $\varphi(n)$  ist eine Potenz von 2.
  3.  $n = 2^m \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_r$  mit  $m, r \in \mathbb{N}$  und  $p_i = 2^{2^{s_i}} + 1$  ist eine Fermatsche Primzahl.
- Quadratur des Kreises  
Zu jedem gegebenen Kreis kann mit Zirkel und Lineal kein inhaltsgleiches Quadrat konstruiert werden.
- punktmengengeometrische Fassung von Tarski
- Zerlegungsstruktur, Kleinscher Raum
- Hauptsatz über Zerlegungsstrukturen, Formales Hauptkriterium
- Verdoppelung des Würfels
- Dreiteilung des Winkels

## 1.6 Lineare Räume

- linearer Raum (Vektorraum), Beispiele, Unterräume
- Linearkombination
- lineare Hülle
- Satz von den Eigenschaften der linearen Hülle  
Für beliebige Teilmengen  $A, B$  eines Vektorraumes  $V$  gilt:
  1.  $\text{lin}(A) = \bigcup_{A \subseteq U} U$  ( $U$  linearer Unterraum von  $V$ )
  2. Ist  $A$  ein linearer Unterraum von  $V$ , so ist die lineare Hülle von  $A$  gleich  $A$
  3. Die lineare Hülle ist ein Hüllenoperator auf  $V$ , es gilt:
    - $\text{lin} : 2^V \rightarrow 2^V$
    - $A \subseteq \text{lin}(A)$
    - $A \subseteq B \Rightarrow \text{lin}(A) \subseteq \text{lin}(B)$
    - $\text{lin}(\text{lin}(A)) = \text{lin}(A)$
- lineare Unabhängigkeit
- Basis
- Basissatz für Vektorräume  
Jeder Vektorraum besitzt eine Basis und alle Basen desselben Vektorraumes sind gleichmächtig. (ohne Beweis)
- Austauschatz von Steinitz  
Wenn  $B$  eine Basis des Vektorraumes  $V$  und  $C = c_1, \dots, c_r$  eine linear unabhängige Menge von Vektoren aus  $V$  ist, dann existieren Basiselemente  $b_1, \dots, b_r \in B$ , so dass  $B' := C \cup (B \setminus \{b_1, \dots, b_r\})$  wieder eine Basis von  $V$  ist. (Basiselemente können durch andere linear unabhängige ersetzt werden).
- Dimension

## 1.7 Lineare Abbildungen, Gleichungssysteme, etc.

- lineare Abbildung, Beispiele
- Hauptsatz über endlichdimensionale lineare Räume  
Jeder lineare Raum  $(V, +, \mathbb{K})$  dessen Dimension eine natürliche Zahl ist ( $\dim V = n \in \mathbb{N}$ ), ist isomorph zum Raum  $\mathbb{K}^n$ .
- Rang
- Dimensionssatz für lineare Abbildungen  
Für alle linearen Abbildungen  $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$  eines endlichdimensionalen linearen Raumes  $V$  in einen linearen Raum  $W$  gilt  $\dim \ker \varphi + \text{rg} \varphi = \dim V$ .

- Matrix, Algebra, Endomorphismenring
- invertierbare Matrix
- Determinante
- Charakterisierung der Determinanten nach Weierstraß
- Laplacescher Entwicklungssatz
- lineares Gleichungssystem
- Hauptsatz über lineare Gleichungssysteme  
Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix gleich dem Rang der Systemmatrix ist.  
Ist das lineares Gleichungssystem  $Ax = b$  lösbar, so ist die Lösungsmenge  $(n - r)$ -parametrig, wenn  $n$  die Anzahl der Unbekannten und  $r$  der Rang der Koeffizientenmatrix ist.
- Cramersche Regel
- Gaußscher Algorithmus

## 1.8 Affine Geometrie

- affiner Raum (vier Eigenschaften), affines Koordinatensystem, affiner Unterraum, affine Hülle
- Translation, translationsgleich, Translationsgleichheit ist Äquivalenzrelation
- affine Abbildung (zwei Eigenschaften), affine Transformation
- affine Kombination, konvexe Kombination, konvexe Hülle
- Dimension, affin unabhängig

## 1.9 Euklidische Geometrie

- Bilinearform, hermitesche Form, positiv definit, hermitesche und symmetrische Matrix, euklidischer linearen Raum
- Skalarprodukt
- Cauchy-Schwartzsche-Ungleichung  
Ist  $(V, f)$  ein euklidischer bzw. unitärer linearer Raum, so gilt  $\forall x, y \in V |f(x, y)|^2 \leq f(x, x) \cdot f(y, y)$ . (Gleichheit gilt, wenn  $x, y$  linear unabhängig sind.)
- normierter Raum, metrischer Raum, Abstand, Orthogonalität
- Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

- orthogonale Gruppe
- Eigenwert, Eigenvektor, charakteristische Gleichung, charakteristisches Polynom
- Hauptachsentransformation